Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 1 (Individual)

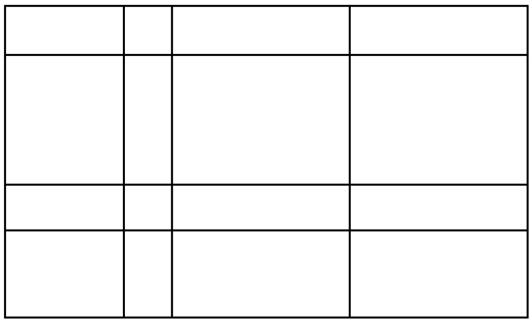
香港数学竞赛 (2012 / 2013)

决赛项目 1 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 图 1 共有 a 个长方形。求 a 的数值。

Figure 1 has a rectangles. Find the value of a.



图一

Figure 1

$a =$

2. 已知 111111 能被 7 整除。若 b 为 $\underbrace{111111\ldots111111}_{a\text{ 个}}$ 除以 7 的余数，求 b 的数值。

Given that 7 divides 111111. If b is the remainder of $\underbrace{111111\ldots111111}_{a\text{ times}}$ divided by 7, find the value of b.

$b =$

3. 若 c 为 $\left[(b-2)^{4b^2}+(b-1)^{2b^2}+b^{b^2}\right]$ 除以 3 的余数，求 c 的数值。

If c is the remainder of $\left[(b-2)^{4b^2}+(b-1)^{2b^2}+b^{b^2}\right]$ divided by 3, find the value of c.

$c =$

4. 若$|x+1|+|y-1|+|z|=c$，求 $d=x^2+y^2+z^2$ 的最大可能数值。

If $|x+1|+|y-1|+|z|=c$, find the maximum possible value of $d=x^2+y^2+z^2$.

$d=$

Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 2 (Individual)

香港数学竞赛 (2012 / 2013)

决赛项目 2 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 已知函数 $f(x)=x^2+rx+s$ 和 $g(x)=x^2-9x+6$ 有以下特性：$f(x)$ 的根之和是 $g(x)$ 的根之积，且 $f(x)$ 的根之积是 $g(x)$ 的根之和。若 $f(x)$ 的最小值取值于 $x=a$，求 a 的值。

Given that functions $f(x)=x^2+rx+s$ and $g(x)=x^2-9x+6$ have the properties that the sum of roots of $f(x)$ is the product of the roots of $g(x)$ and the product of roots of $f(x)$ is the sum of the roots of $g(x)$. If $f(x)$ attains its minimum at $x=a$, find the value of a.

$a =$

2. 一正方体的表面积是 b cm^2。若它每一条边的长度增加 3 cm，它的体积随之增加 $(2b-a)$ cm^3，求 b 的值。

The surface area of a cube is b cm^2. If the length of each side is increased by 3 cm, its volume is increased by $(2b-a)$ cm^3, find the value of b.

$b =$

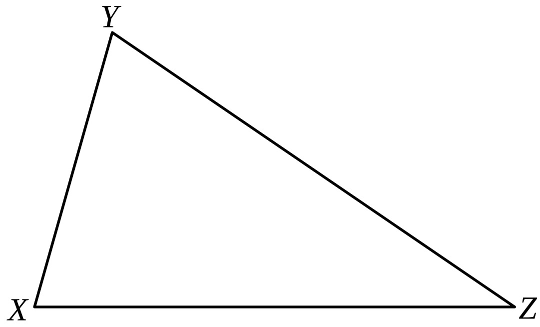
3. 设 $f(1)=3$，$f(2)=5$ 且对所有正整数 n，$f(n+2)=f(n+1)+f(n)$。当 $f(b)$ 除以 3 的余数是 c，求 c 的值。

Let $f(1)=3$, $f(2)=5$ and $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$ for positive integers n. If c is the remainder of $f(b)$ divided by 3, find the value of c.

$c =$

4. 如图 2，三角形 XYZ 的角度满足 $\angle Z \leq \angle Y \leq \angle X$ 且 $c\cdot\angle X = 6\cdot\angle Z$。 若 $\angle Z$ 的最大可能值是 $d°$，求 d 的值。

In Figure 2, the angles of triangle XYZ satisfy $\angle Z \leq \angle Y \leq \angle X$ and $c\cdot\angle X = 6\cdot\angle Z$. If the maximum possible value of $\angle Z$ is $d°$, find the value of d.



图二

Figure 2

$d =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 3 (Individual)

香港数学竞赛 (2012 / 2013)

决赛项目 3 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 $a=\frac{(7+4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(7-4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$，求 a 的整数值。

If $a=\frac{(7+4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(7-4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$, find the integer value of a.

$a=$

2. 设 $f(x)=x-a$ 及 $F(x,y)=y^2+x$。如 $b=F(3,f(4))$，求 b 的值。

Suppose $f(x)=x-a$ and $F(x,y)=y^2+x$. If $b=F(3,f(4))$, find the value of b.

$b=$

3. 已知 392 除以一个两位正整数的余数是 b，符合这个条件的两位正整数共有 c 个, 求 c 的值。

The remainder of 392 divided by a 2-digit positive integer is b. If c is the number of such 2-digit positive integers, find the value of c.

$c=$

4. 若 x 为实数及 d 为函数 $y=\frac{3x^2+3x+c}{x^2+x+1}$ 的最大值，求 d 的值。

If x is a real number and d is the maximum value of the function $y=\frac{3x^2+3x+c}{x^2+x+1}$, find the value of d.

$d=$

Hong Kong Mathematics Olympiad (2012 / 2013)

Final Event 4 (Individual)

香港数学竞赛 (2012 / 2013)

决赛项目 4 (个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 设实函数 $f(x)$ 对于所有实数 x 及 y 满足 $f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f(0)\neq 0$。求 $a=f(1)$ 的值。

Let $f(x)$ be a real function that satisfies $f(xy)=f(x)f(y)$ for all real numbers x and y, and $f(0)\neq 0$. Find the value of $a=f(1)$.

$a=$

2. 设函数 $F(n)$ 满足 $F(1)=F(2)=F(3)=a$ 及 $F(n+1)=\dfrac{F(n)\times F(n-1)+1}{F(n-2)}$，其中 $n\geq 3$ 为正整数。求 $b=F(6)$ 的值。

Let $F(n)$ be a function with $F(1)=F(2)=F(3)=a$ and $F(n+1)=\dfrac{F(n)\times F(n-1)+1}{F(n-2)}$ for positive integers $n\geq 3$. Find the value of $b=F(6)$.

$b=$

3. 若 $b-6$、$b-5$、$b-4$ 为方程 $x^4+rx^2+sx+t=0$ 的根，求 $c=r+t$ 的值。

If $b-6$, $b-5$, $b-4$ are three roots of the equation $x^4+rx^2+sx+t=0$, find the value of $c=r+t$.

$c=$

4. 设 (x_0,y_0) 是以下方程组的一个解：

$$\begin{cases} xy=6 \\ x^2y+yx^2+x+y+c=2 \end{cases}$$

求 $d=x^2_0+y_0^2$ 的值。

Suppose that (x_0,y_0) is a solution of the system:

$$\begin{cases} xy=6 \\ x^2y+yx^2+x+y+c=2 \end{cases}$$

Find the value of $d=x^2_0+y_0^2$.

$d=$